Graue Theorie II

Mathematische Grundlagen

Autor: Uwe Gleiß, Franz-Ludwig-Gymnasium Bamberg, Computergrafikgruppe (CoGra-FLG) • Kontakt: cogra-flg@web.de

Zum Inhalt

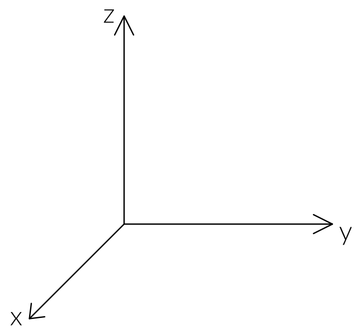
Um sämtliche mathematischen Methoden der Bildberechnung zu erfassen würde auch ein ganzes Buch nicht ausreichen. Dieses Skript konzentriert sich auf Methoden, wie sie größtenteils auch in der Schule behandelt werden.

Wenn Ihnen bei Worten wie „Vektoralgebra" ein Schauer über den Rücken läuft, können Sie dieses Skript problemlos ignorieren und sich beispielsweise auf die physikalischen Grundlagen in Teil III stürzen. Das Skript setzt zwar nicht all zu viel Wissen voraus, stellt die Inhalte aber sehr kompakt dar. Ein Durcharbeiten in einem Rutsch dürfte zu viel des Guten sein. Stift und Papier griffbereit zu haben dürfte nicht nur für die Übungsaufgaben sinnvoll sein.

Rechnen mit Vektoren

Ein passendes Koordinatensystem

Grundelemente aller Berechnungen sind Vektoren. Um sich eine Vorstellung von geometrischen Vektoren[1] machen zu können, ist zunächst ein passendes Koordinatensystem notwendig. Für dieses Skript sieht dies wie folgt aus:



Die x-Achse verläuft von hinten nach vorne aus der Bildebene heraus, wodurch sich ein sogenanntes rechtshändiges System ergibt. Viele, wenn auch nicht alle Raytracingprogramme verwenden ein solches System, aber die Achsen sind teilweise anders orientiert. In Maya beispielsweise zeigt die y-Achse nach oben. Dieses Skript orientiert sich diesbezüglich an Blender.

[1] In der Mathematik ist „Vektor" ein sehr allgemeiner Begriff, der weit mehr beschreiben kann als eine gerichtete Strecke. Zur Abgrenzung wird darum bisweilen der Begriff „geometrischer Vektor" verwendet. Bleibt man im Bereich der analytischen Geometrie so kann man die beiden Begriffe gefahrlos als identisch betrachten.

Was ist ein Vektor?

Ein geometrischer Vektor wird in der Mathematik wie folgt beschrieben:

Ein Vektor ist die Menge aller gleich orientierten und gleich langen, gerichteten Strecken.

Das ist so zwar mathematisch korrekt, für die praktische Anwendung innerhalb dieses Skripts aber wenig hilfreich. Die Vorstellung eines Pfeils in Ebene oder Raum genügt für unsere Zwecke vollkommen. Dabei kann ein Vektor zwei unterschiedliche Rollen übernehmen:

- Ortsvektoren
  Ein Vektor kann vom Nullpunkt des Koordinatensystems auf eine bestimmte Position zeigen und damit einen Punkt, wie z.B. die Ecke eines Quaders festlegen.[2]
- Richtungsvektoren
  Ein Vektor kann eine Verschiebung oder eine Verbindungslinie beschreiben. Er kann die Richtung einer Kante darstellen oder auch als Drehachse dienen.

Beschreibung von Vektoren

Ein Vektor besitzt wie auch ein Punkt für jede Achse eine Komponente. Der folgende Vektor könnte z. B. eine Verschiebung um 3 Einheiten in x-Richtung, 4 in y-Richtung und um 2 Einheiten in z-Richtung darstellen, oder den Punkt A(3|4|2) als Ortsvektor beschreiben:

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Verwendung als Ortsvektor ist in der Computergrafik der häufigere Fall. Richtungsvektoren kommen eher unsichtbar zum Einsatz, wenn Objekte gedreht oder verschoben werden.

Grundlegende Rechenoperationen

- Addition
  Zwei Vektoren werden addiert (oder subtrahiert), indem ihre einzelnen Komponenten addiert werden

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

  Beschreibt beispielsweise $\overrightarrow{a}$ die Ecke eines Tisches und $\overrightarrow{b}$ die Richtung, in die das Möbelstück verschoben werden soll, so ist $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ die Position der neuen Ecke.

- S-Multiplikation
  Zahlen werden zur Unterscheidung von Vektoren oft als **Skalare** bezeichnet (daher S-Multiplikation). Auch diese geschieht komponentenweise.

$$\lambda \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \\ \lambda \cdot a_z \end{pmatrix}$$

---

[2] Dass man hierfür nicht Punkte verwendet liegt schlicht an der Tatsache, dass Orts- und Richtungsvektoren in Rechnungen miteinander verknüpft werden. Punkte wären streng betrachtet andere mathematische Objekte und damit nicht kompatibel. Für die hier angestrebten Zwecke sind Ortsvektoren aber nichts anderes als Punktkkoordinaten, nur ein wenig anders aufgeschrieben.

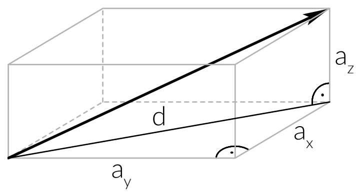
- **Verbindungsvektor zweier Punkte**
  Sind die Punkte A($a_x|a_y|a_z$) und B($b_x|b_y|b_z$) mit ihren Koordinaten gegeben, so berechnet sich der Verbindungsvektor von A nach B wie folgt:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix}$$

- **Vektorlänge**
  Die Länge eines Vektors wird als sein **Betrag** bezeichnet. Dargestellt wird sie entweder durch Betragsstriche um den Vektor oder durch Weglassen des Vektorpfeils. Berechnet wird sie wie folgt:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

  Diese Formel sieht der Längenberechnung mittels des Satzes von Pythagoras nicht nur ähnlich, sondern folgt auch aus diesem:



  Betrachten wir $\vec{a}$ als Diagonale eines Quaders, dessen Kantenlängen den Komponenten des Vektors entsprechen. Für die Länge der Bodendiagonalen gilt dann:

$$d^2 = a_x^2 + a_y^2$$

  Der Vektor bildet mit d und der Kante a_z ein weiteres rechtwinkliges Dreieck, in dem gilt:

$$a^2 = d^2 + a_z^2$$

  Einsetzen von d^2 in diese zweite Formel ergibt

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Übung macht den Meister

Zur besseren Verdauung der bisher besprochenen Inhalte ist ein wenig Training anzuraten. Beginnen Sie dieses beispielsweise, indem Sie ein einfaches kleines Objekt in Blender wild durch die Landschaft schieben, um dann seine Position abzuschätzen. Ihre Schätzung können Sie in den Objekteigenschaften prüfen.[3]

Platzieren Sie an ihrem Aufenthaltsort in Gedanken ein Koordinatensystem im Raum und überlegen Sie, welche Koordinaten darin der Ortsvektor des Lichtschalters oder einer Tischecke besitzt. Bugsieren Sie sich schwungvoll auf ihrem Schreibtischstuhl über den Teppich und beschreiben Sie die zugehörige Verschiebung als Vektor.

Das räumliche Vorstellungsvermögen ist sehr unterschiedlich ausgeprägt, so dass Manchem Übungen wie oben kindisch erscheinen und Andere sich damit schwer tun. Gerade im letzteren Fall kann das Übersetzen in Zahlen manches besser erfassbar, wenn auch vielleicht nicht besser vorstellbar machen.

Auch Skizzen können beim Umgang mit Koordinaten helfen. Dabei ist deren künstlerischer Wert zweitrangig. Entscheidend ist ein Training der eigenen Vorstellung von Objekten im Raum.

[3] Wenn Sie Blender bisher nicht verwendet haben: Lektion 1 des Blenderkurses sollte Ihnen das Wichtigste für eine solche Übung vermitteln.

Etwas konkreter können Sie mit den folgenden Aufgaben trainieren:[4]

1. Ein Raum hat die Abmessungen 4 x 6 x 3; der Nullpunkt des Koordinatensystems befinde sich in der Ecke links hinten unten. Zeichnen Sie ein Schrägbild und beschriften Sie alle Eckpunkte mit ihren Koordinaten. Welche Koordinaten hat die Mitte der vorderen oberen Kante, die Mitte der rechten Seitenfläche und die Raummitte?
2. Die Ecken eines Dreiecks liegen bei A(2|3|5), B(-1|4|2) und C(5|7|3). bestimmen Sie die Vektoren, die von einer zur nächsten Ecke zeigen und bilden Sie dann deren Summe! Warum ist diese Summe eine mögliche Überprüfung der vorher ermittelten Vektoren?
3. Bestimmen Sie eine Formel, mit der man aus den Endkoordinaten einer Strecke die Koordinaten des Mittelpunkts bestimmen kann und überprüfen Sie diese in einer Zeichnung.
4. Bestimmen Sie zur Strecke [AB] aus Teilaufgabe 2 die beiden Teilpunkte T_1 und T_2, die die Strecke im Verhältnis dritteln.
5. Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks aus Aufgabe 2!

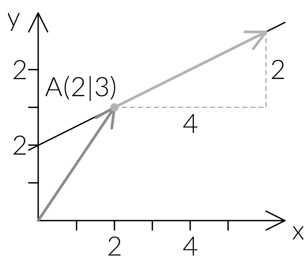
Objekte im Raum

Geraden

Eine Gerade in einem zweidimensionalen Koordinatensystem kann man als lineare Funktion beschreiben. Dazu genügt der Schnittpunkt mit der y-Achse und die Steigung. Ein Beispiel:

$$g : y = 2 + \frac{1}{2}x$$

Der y-Achsenabschnitt ist 2, die Steigung 0,5. Die Punkte der Gerade entstehen, indem x alle Zahlen durchläuft und man den jeweils zugehörigen y-Wert berechnet.



Man könnte die Gerade auch durch einen **Aufpunkt** A und durch ihre Richtung beschreiben. Beide Informationen lassen sich als Vektoren darstellen. Wir wählen in unserem Fall:

$$A(2\,|\,3) \qquad \text{und} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Gerade lässt sich damit in **Parameterform** wie folgt darstellen:

$$g : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \lambda \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lässt man λ sämtliche Zahlen durchlaufen, so sind die Ergebnisse $\overrightarrow{x}$ alle Ortsvektoren der Gerade.

[4] Die Lösungen finden Sie am Ende des Skripts.

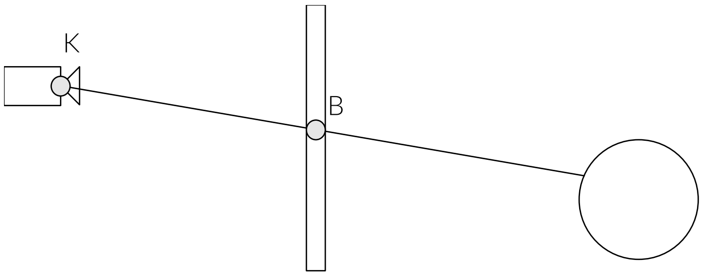
Sowohl der Ortsvektor für den Aufpunkt als auch der Richtungsvektor sind nicht eindeutig festgelegt. Die folgenden beiden Gleichungen beschreiben die selbe Gerade wie oben:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im zweiten Fall wurde der Richtungsvektor durch seine Länge dividiert. Dadurch entsteht der zugehörige **normierte Vekto**r mit Länge 1. Ein solcher Schritt vereinfacht später Abstandsmessungen.

Eine Abtastgerade beim Raytracinverfahren

Wie in Kapitel I angesprochen ist für das Raytracingverfahren zu Beginn ein Strahl von der Kamera durch den Pixel notwendig, dessen Farbe zu bestimmen ist.



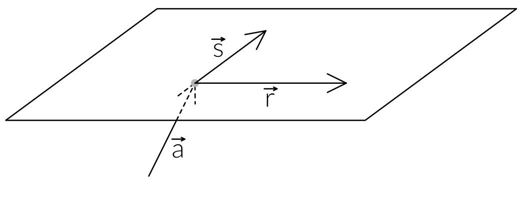
Als Ausgangspunkt des Strahls dient K und als Richtung der Vektor von K zu B. Damit keine ganze Gerade sondern nur ein Strahl entsteht, schränkt man λ auf positive Werte ein.

$$g : \vec{x} = \vec{k} + \lambda \cdot \overrightarrow{KB} = \vec{k} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{k}); \quad \lambda \geq 0$$

Ebenen

Der Sehstrahl benötigt noch ein potenzielles Ziel. Dazu beginnen wir mit der Darstellung einer unendlich großen Ebene, die wir später noch abgrenzen werden.

Eine Ebene im Raum wird ähnlich beschrieben wie eine Gerade. Auch hier dient ein Ortsvektor $\vec{a}$ als Aufpunkt. Statt einem sind diesmal zwei Richtungsvektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ notwendig. Stellen Sie sich die Ebene als ein Tablett vor, dass Sie auf Daumen und abgespreiztem Zeigefinger einer Hand tragen. Das Daumengelenk ist der Aufpunkt, die beiden Finger sind die Richtungsvektoren.



In der Zeichnung ist die Ebene als Rechteck dargestellt, es sollte aber nicht vergessen werden, dass sie keine Begrenzung besitzt.

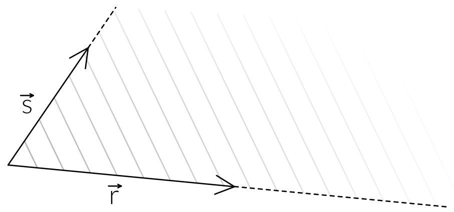
$$E : \vec{x} = \vec{a} + \mu \cdot \vec{r} + \nu \cdot \vec{s}$$

Ähnlich wie bei der Gerade liefert die Gleichung alle Punkte der Ebene, indem die beiden Parameter μ und ν sämtliche Zahlenkombinationen durchlaufen.

Dreiecke

Fast alle Objekte werden in Programmen wie Blender durch ihre Oberfläche beschrieben. Diese wiederum setzt sich in der Mehrzahl der Fälle aus Dreiecken zusammen.[5] Unterteilt man die Oberfläche nur in genügend kleine Dreiecke, so kann praktisch jede Form verwirklicht werden.[6]

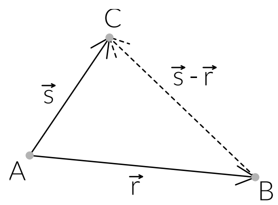
Die obige Gleichung beschreibt alle Punkte der Ebene. Schränken wir die Parameter auf positive Werte ein, dann werden nur noch die Punkte zwischen den beiden Strahlen getroffen, die durch die Richtungsvektoren vorgegeben werden.



Außer einem entsprechenden Zusatz ändert sich dadurch an der Ebenengleichung nichts:

$$E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{r} + \nu \cdot \overrightarrow{s}; \quad \mu, \nu \geq 0$$

Um die Ebene weiter auf ein Dreieck einzuschränken muss man sich überlegen, welche Werte die Parameter annehmen müssen, damit sich Punkte zwischen den Eckpunkten B und C ergeben.



Der Verbindungsvektor von B nach C ist

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{s}) - (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{r}) = \overrightarrow{s} - \overrightarrow{r}$$

Die Punkte zwischen B und C können somit wie folgt beschrieben werden:

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} + \xi \cdot (\overrightarrow{s} - \overrightarrow{r}); \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

Ersetzt man $\overrightarrow{b}$ durch $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{r}$ folgt daraus

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{r} + \xi \cdot (\overrightarrow{s} - \overrightarrow{r}) = \overrightarrow{a} + (1 - \xi) \cdot \overrightarrow{r} + \xi \cdot \overrightarrow{s}; \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

Das ist die gleiche Form, wie die Ebenengleichung, nur mit der Einschränkung, dass die Parameter $\mu = 1 - \xi$ und $\nu = \xi$ zusammen immer 1 ergeben müssen. Lässt man auch Summen kleiner 1 zu, dann ergeben sich die Punkte in der Dreiecksfläche. Die Gleichung für das Dreieck ist damit

$$E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{r} + \nu \cdot \overrightarrow{s}; \quad \mu, \nu \geq 0; \quad \mu + \nu \leq 1$$

Für das Verständnis ist es zu empfehlen, dies einmal an einem konkreten Zahlenbeispiel im Zweidimensionalen in einer Zeichnung an einzeln berechneten Punkten zu überprüfen.

---

[5] Wenn Sie schon mit solchen Programmen gearbeitet haben mag sich hier leichter Protest regen, dass es da auch Vierecke und Polygone mit fünf und mehr Ecken gäbe. Für die Bildberechnung (und die ist es, um die es hier geht), werden diese Vielecke aber immer intern in Dreiecke aufgeteilt.

[6] Für modernen Computer und Programme stellen auch einige Millionen Dreiecke keine unüberwindliche Hürde mehr dar.

Weitere Berechnungsmethoden

Damit wir später die Helligkeit eines Pixels berechnen können ist entscheidend, in welchen Winkel das Licht auf die Oberfläche eines Körpers trifft. Dazu benötigen wir noch Rechenmethoden, die Winkel mit ins Spiel bringen.

- **Skalarprodukt**
  Das Skalarprodukt von zwei Vektoren ist wie folgt festgelegt:

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

  Zugleich gilt aber auch

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \varphi$$

  wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.
  Umgestellt erhält man so eine Formel zur Berechnung dieses Winkels:

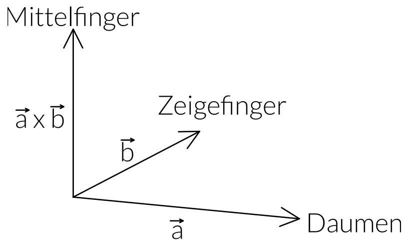
$$\varphi = \arccos \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

  Besonders schnell ist überprüfbar, ob zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen, denn dann wird das Skalarprodukt Null.

- **Vektor- oder Kreuzprodukt**

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$ [7]

  Der so entstehende neue Vektor steht senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren. Sind $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ beispielsweise die Richtungsvektoren einer Ebene, dann ist $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ der sogenannte **Normalenvektor** dieser Ebene. Die genaue Richtung des Kreuzprodukts kann man sich mit drei abgespreizten Fingern der rechten Hand veranschaulichen.

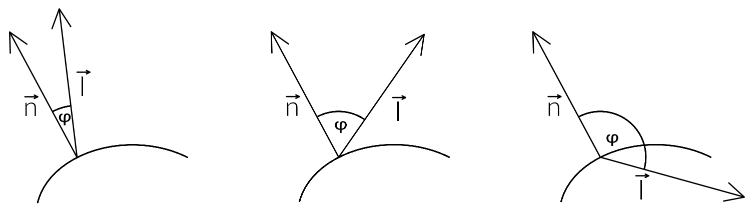


[7] Eine Merkhilfe für diese Formel ergibt sich, indem man für jede Zeile die Buchstaben x-y-z-x-y in ihrer Reihenfolge durchwandert: Die x-Zeile des Kreuzproduktes beginnt mit y-z, die der y-Zeile mit dem „nachfolgenden" z-x und die z-Zeile mit x-y.

Anwendungen für Winkel

Wann immer beim Raytracing ein rückverfolgter Strahl auf eine Oberfläche trifft, kommen sowohl der Normalenvektor auf dieser Oberfläche als auch das Skalarprodukt zum Einsatz.

Wie in Kapitel I beschrieben wurde ist der Winkel, in dem Licht auf einen Gegenstand trifft, entscheidend für die Helligkeit der Oberfläche. Den Winkel zwischen Oberflächennormale $\overrightarrow{n}$ und Vektor in Richtung der Lichtquelle $\vec{l}$ liefert das Skalarprodukt. Ist er klein, so trifft das Licht steil auf und die Oberfläche sollte hell erscheinen. Ist der Winkel groß, so erscheint die Fläche dunkler. Die genaue Abhängigkeit der Helligkeit vom Einfallswinkel des Lichts ist je nach Material unterschiedlich. Ein sogenannter **Shader** ist dabei eine Berechnungsmethode für diesen Übergang.



Der Winkel zwischen den beiden genannten Vektoren ist auch von Bedeutung für die Berechnung von Reflexion und Brechung. Im letzteren Fall zeigt ein negatives Skalarprodukt zudem auch noch an, dass der Strahl „von innen“ auf die Oberfläche trifft; als Folge wird die Brechung entsprechend umgekehrt berechnet wie beim Übergang von Innen nach Außen.[8]

Schnittpunkte

Einen möglichen Schnittpunkt von zwei Objekten ermittelt man durch Gleichsetzen. Für eine Ebene E und eine Gerade g der Form

$$E : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \mu \cdot \vec{r} + \nu \cdot \vec{s} \qquad\qquad g : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} + \lambda \cdot \vec{t}$$

führt das zu der Gleichung

$$\overrightarrow{a} + \mu \cdot \vec{r} + \nu \cdot \vec{s} = \overrightarrow{b} + \lambda \cdot \vec{t}$$

Da diese aus drei Zeilen für die Koordinaten besteht, handelt es sich eigentlich um ein Gleichungssystem mit den Parametern als Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_x + \mu \cdot r_x + \nu \cdot s_x &= b_x + \lambda \cdot t_x \\ a_y + \mu \cdot r_y + \nu \cdot s_y &= b_y + \lambda \cdot t_y \\ a_z + \mu \cdot r_z + \nu \cdot s_z &= b_z + \lambda \cdot t_z \end{aligned}$$

Wie ein solches System zu lösen ist wird an dieser Stelle nicht gesondert behandelt. Es sei nur darauf verwiesen, dass es oft effizientere Methoden gibt als das mühsame Auflösen von Hand, wie z.B. mit dem Gauß Algorithmus oder mittels Determinanten.

Ergibt sich eine Lösung für μ und ν, die den Bedingungen $\mu, \nu \geq 0$ und $\mu + \nu \leq 1$ genügt, dann schneidet die Gerade die Ebene innerhalb des oben angesprochenen Dreiecks.

[8] Dies ist auch der Grund, warum sich falsch ausgerichtete Flächennormalen bei einer Bildberechnung besonders bei transparenten Materialien durch offensichtliche Fehler bemerkbar machen.

Aufgaben

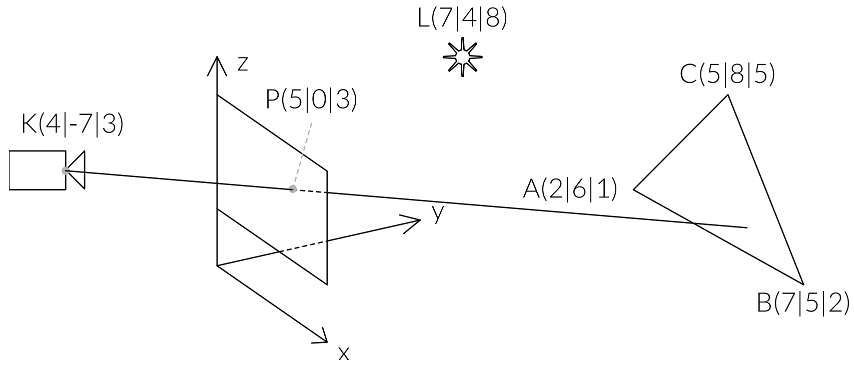
6. Gegeben sind die Punkte A(2|3|0), B(5|0|4) und C(0|2|2), sowie T(-2|-1|-1) und S(5|5|1). Stellen Sie die Ebene durch A, B und C, sowie die Gerade durch T und S in Parameterform dar.
7. Ermitteln Sie den Schnittpunkt von Gerade und Ebene aus Aufgabe 6. Dazu müssen Sie die beiden Gleichungen gleichsetzen und die Parameter bestimmen.
8. Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene aus Aufgabe 6 steht.
9. In welchem Winkel trifft die Gerade auf die Ebene? Machen Sie sich vor einer Berechnung ein Bild von der Lage, indem sie Schnittpunkt, Gerade mit Richtungsvektor und die Ebene mit ihrem Normalenvektor in einer Skizze darstellen.

Ein Rechenbeispiel

An dieser Stelle könnte ein erneutes Überfliegen von Kapitel 1 sinnvoll sein. Nachfolgend wird an einem konkreten Zahlenbeispiel gezeigt, welche Rechenschritte notwendig sind, um die Helligkeit eines Pixels zu berechnen. Neben der Tatsache, dass man so ein wenig Einblick in das mathematische Verfahren erhält, könnte es den Respekt vor dem eigenen langsamen Computer wieder etwas steigern. Denn das was hier jetzt mühsam von Hand einiges an Zeit benötigt macht selbst ein in die Jahre gekommener Rechner mehrere tausend Mal pro Sekunde, wenn er ein Bild berechnet.

Die virtuelle Szene

Die Koordinaten für die Berechnungen stammen aus der unten nicht maßstäblich dargestellten Szene. Die gedachte Bildebene befindet sich in der x-z-Ebene. Ziel ist es, die Helligkeit im Pixel P zu bestimmen.



Vorbereitungen

Zuerst werden die Gleichungen aufgestellt, die Objekt und Sehstrahl beschreiben.[9]

- Sehstrahl

$$s : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{k} + \lambda \cdot \overrightarrow{KP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda \geq 0$$

Die Bedingung $\lambda \geq 0$ macht aus der Geraden einen Strahl, der nur nach vorne zeigt.

[9] Viele dieser Informationen behält der Computer während der Bildberechnung im Speicher, um Rechenzeit zu sparen, die sonst bei jedem einzelnen Pixel erneut notwendig wäre. Dabei und bei weiteren Optimierungsmöglichkeiten ist immer abzuwägen zwischen Rechenaufwand und Speicherbedarf.

- Dreieck

$$\begin{aligned} D:\vec{x} &= \vec{a} + \mu\cdot\overrightarrow{AB} + \nu\cdot\overrightarrow{AC} = \\ &= \begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix} + \nu\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}; \qquad \mu,\nu \geq 0;\ \mu+\nu\leq 1\end{aligned}$$

- Normalenvektor

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4-2\\3-20\\10+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-17\\13\end{pmatrix}$$

Schnittpunktberechnung

Gleichsetzen von Ebene und Sehstrahl ergibt

$$\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix} + \nu\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}$$

Daraus wiederum entsteht das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccccc} -\lambda & +5\mu & +3\nu & = & 2 & (I) \\ -7\lambda & -\mu & +2\nu & = & -13 & (II) \\ & \mu & +4\nu & = & 2 & (III) \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{llcl} III \Rightarrow \mu = 2-4\nu & & & \\ \mu \text{ in } I & \Rightarrow -\lambda+10-20\nu+3\nu & = & 2 \\ & \Rightarrow \lambda & = & 8-17\nu \\ \lambda,\mu \text{ in } II & \Rightarrow -56+119\nu-2+4\nu+2\nu & = & -13 \\ & \Rightarrow 125\nu & = & 45 \\ & \Rightarrow \nu & = & \underline{\underline{\frac{9}{25}}} \end{array}$$

$$\Rightarrow \mu = 2-4\cdot\frac{9}{25} = \underline{\underline{\frac{14}{25}}}; \qquad \lambda = 8-17\cdot\frac{9}{25} = \underline{\underline{\frac{47}{25}}}$$

μ und ν erfüllen die Bedingungen für einen Schnittpunkt innerhalb des Dreiecks, der Strahl trifft also. Den Schnittpunkt Q erhält man am schnellsten durch einsetzen von λ in die Geradengleichung.

$$\vec{q} = \begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix} + \frac{47}{25}\cdot\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{147}{25}\\\frac{154}{25}\\3\end{pmatrix}$$

Bestimmung der Helligkeit

Vom Schnittpunkt wird der Weg weiter verfolgt in Richtung Lichtquelle. Der Verbindungsvektor ist

$$\overrightarrow{QL} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{147}{25} \\ \frac{154}{25} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{25} \\ -\frac{54}{25} \\ 5 \end{pmatrix}$$

Für den Winkel zwischen den beiden Vektoren werden deren Beträge und das Skalarprodukt benötigt.[10]

$$|\overrightarrow{QL}| = \sqrt{\left(\frac{28}{25}\right)^2 + \left(-\frac{54}{25}\right)^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{773}}{5}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-6)^2 + (-17)^2 + 13^2} = \sqrt{494}$$

$$\overrightarrow{QL} \circ \vec{n} \begin{pmatrix} \frac{28}{25} \\ -\frac{54}{25} \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ -17 \\ 13 \end{pmatrix} = -\frac{168}{25} + \frac{918}{25} + 65 = 95$$

Damit ist der Winkel

$$\varphi = \arccos \frac{95}{\frac{\sqrt{773}}{5} \cdot \sqrt{494}} \approx 39{,}8°$$

Den Winkel nutzt ein weiteres Rechenverfahren innerhalb eines Shaders, um die genaue Helligkeit zu bestimmen. Hinzu kommt die Länge der Strecke [LQ]: Je weiter ein Objektpunkt von der Lichtquelle entfernt ist, desto weniger Licht kommt bei ihm an.

Schlimmer geht immer

Mehr Objekte – mehr Rechenaufwand

Eine Rechnung wie oben ist für jedes Objekt in einer Szene notwendig. Damit der Rechenaufwand nicht ins Unermessliche steigt, sind die Rechenverfahren heutiger Raytracingprogramme optimiert. Geschickte Algorithmen teilen eine Szene in Raster ein, so dass schnell entschieden werden kann, welche Dreiecke überhaupt für eine Schnittpunktberechnung in Frage kommen. Dennoch steigt der Aufwand mit der Komplexität der Szene deutlich.

Wenn man nun wieder einmal ungeduldig auf den Abschluss einer Bildberechnung wartet hat man nach Studium dieses Kapitels vielleicht ein wenig mehr Verständnis für den eigenen Rechner, denn er hat wirklich eine Menge zu tun, vor allem, weil es mit einem Sehstrahl pro Pixel nicht getan ist und Spiegelungen und Reflexionen für zahlreiche Sekundärstrahlen sorgen.

[10] Für den Normalenvektor ist die Längenberechnung im Computer an dieser Stelle nicht notwendig. Er wird gleich in normierter Form gespeichert.

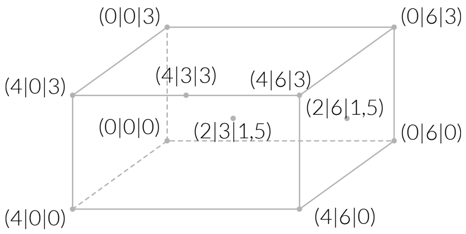
Was am obigen Modell nicht stimmt

Die Bildebene vor der Kamera ist eine Hilfskonstruktion, um zu verstehen, wie die Lage der Abtaststrahlen berechnet werden kann. Sie liegt nicht zwingend in der x-z-Ebene, sondern bewegt sich mit der Kamera. Dies würde allerdings im obigen Rechenbeispiel nur die Koordinaten verändern.

Was auf den ersten Blick vielleicht verwundern könnte ist die Tatsache, dass auch Objekte zwischen Bildebene und Kamera bei der obigen Methode im Bild erscheinen würden. Der Abtaststrahl geht ja von der Kamera aus und kann damit auch vor ihr befindliche Objekte treffen.

LÖSUNGEN

1.



2.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 4-3 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5-(-1) \\ 7-4 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 3-7 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{c}) = \vec{0}$$ [11]

3.

Um zur Seitenmitte zu gelangen wandert man z.B. erst zu A und von dort den halben Weg nach B. Als Formel:

$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

4.

$$\vec{t}_1 = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{11}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_2 = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{10}{3} \\ 4 \end{pmatrix}$$

5.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{163}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{46}$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$U \approx 24{,}93$$

[11] Die Null mit Vektorpfeil bezeichnet man als Nullvektor.

6.

Verwendet werden hier A als Aufpunkt und die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektoren. Für die Gerade wird S als Aufpunkt und $\overrightarrow{ST}$ als Richtungsvektor verwendet. Das wäre natürlich auch anders möglich.

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

7.

Gleichsetzen führt zum folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2 + 3\mu - 2\nu &= -2 + 7\lambda \quad (I) \\ 3 - 3\mu - \nu &= -1 + 6\lambda \quad (II) \\ 4\mu + 2\nu &= -1 + 2\lambda \quad (III) \end{aligned}$$

Die Schritte zur Lösung werden hier nicht vorgeführt. Als Lösung ergibt sich:

$\mu = \frac{11}{116}$ $\nu = -\frac{7}{116}$ und $\lambda = \frac{73}{116}$

Durch Einsetzen z.B. von λ in die Geradengleichung ergibt sich der etwas unhandliche Schnittpunkt

$\left(\frac{279}{116} \middle| \frac{161}{58} \middle| \frac{15}{58}\right)$

Es war hier nicht gefragt, aber da ν negativ ist, liegt der Schnittpunkt nicht im Dreieck, das von den beiden Richtungsvektoren der Ebene aufgespannt wird.

8.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 4 \\ -8 - 6 \\ -3 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ -9 \end{pmatrix}$$

9.

Der Winkel zwischen Ebene und Gerade und der Winkel zwischen Gerade und Normalenvektor der Ebene ergänzen sich zu 90°. Den Vektor zwischen Normalenvektor und Gerade kann man mittels Skalarprodukt berechnen:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ -9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = -14 - 84 - 18 = -116$$

$\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ -9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 14^2 + 81} = \sqrt{865}$ $\left|\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{49 + 36 + 4} = \sqrt{59}$

$\varphi = \arccos \frac{-116}{\sqrt{865} \cdot \sqrt{59}} \approx 120{,}9°$ Der gesuchte Winkel ist 90° - 120,9° = (-)30,9°